Mavzu: Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kramer formulasi.

Reja:

1. **Chiziqli tenglamalar sistemasi.**
2. **Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer formulasi.**
3. **No'malumlarni ketma-ket yo'qotish usili.**

1. n nomalumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Ko'rinishga ega bo'lib, bunda a_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$), b_j lar biror R sonlar maydoniga tegishli sonlardir, x_i lar esa noma'lumlardan iborat. a_{ij} lar (1) sistemaning noma'lumlar oldidagi koeffisientlardir, b_j lar esa ozod hadlar deb ataladi. O'z-o'zidan ma'lumki, barcha $a_{ij}=0$ bo'la olmaydi, chunki bunday holda biz tenglamalar sistemalariga ega bo'la olmaymiz. Lekin $\forall$ $b_j=0$ bo'lishi mumkin. Bunday holda (1) sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

ko'rinishni oladi.

(1) sistemadagi m va n lar uchun m=n yoki $m \neq n$ bo'lishi mumkin.

Ta'rif. Agar (1) sistemada noldan farqli b_j ($i=\overline{1,m}$) mavjud bo'lsa , bu sistema bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi, barcha $b_j=0$ ($i=\overline{1,m}$) bo'lganda hosil bo'ladigan (2) sistema esa bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi.

2-Ta'rif. (1) sistemaning har bir tenglamasini to'g'ri sonli tenglikka aylantiruvchi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ to'plamga (1) sistemaning yechimi deyiladi.

3-Ta'rif. Yechimga ega bo'lgan sistema hamjoyli (birgalikda), yecimga ega bo'lmagan sistema esa hamjoysiz (birgalikda bo'lmagan) sistema deyiladi.

Hamjoyli sistemaning o'zi yana 2 qismga , yani aniq va aniqmas sistemalarga bo'linadi.

4-Ta'rif. Yagona yechimga ega bo'lgan sistema aniq sistema, yechimlarining soni cheksiz ko'p bo'lgan sistema aniqmas sistema deyiladi

2. n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3)$$

Quyidagi diterminantni tuzamiz.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \Delta_{x1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots \quad \Delta_{xn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Bu yerda sistema diterminanti Δ (3) dagi noma'lumlarining koeffisiyentlaridan Δ_{xk} (k=$\overline{1,n}$) esa Δ da k- ustunli ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo'ladi.

Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa (3) sistema birgalikda va yagona yechimga ega, ya'ni aniq sistema bo'ladi.Bu yechim

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ \dots \ x_n=\frac{\Delta x_n}{\Delta} \quad (4)$$

formulalar bilan topiladi. Sistemani yechishning bu usuli Kramer qoidasi deyiladi.

Agar sistema diterminanti $\Delta = 0$ bo'lib:

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = 0$ bo'lsa, (3) sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega (aniqmas sistema);

$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ lardan birortasi noldan farqli bo'lsa, sistema yechimga ega emas (birgalikda bo'lmagan sistema).

1. Chiziqli tenglamalar sistemalarini yechishning bir necha usuli mavjud. Ulardan biri noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usulidir. Mazkur usuldan birinchi marta nemis matematigi K. Gauss foydalangani uchun bu usul Gauss usuli deb ham yuritiladi.

Quyidagi n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = a_m \end{cases} \qquad (1)$$

Bunda $a_{ij} \in P, a_j \in P$ bo'lgani holda m=n, m>n, m<n bo'lishi mumkin. a_{ij}(i=$\overline{1,m}$) lardan kamida bittasi noldan farqli, aks holda noma'lumlar soni n dan kichik bo'lar edi. Faraz qilaylik, $a_{11} \neq 0$. (1) sistemaning birinchi tenglamasini ketma-ket -$\frac{a_{21}}{a_{11}}$, -$\frac{a_{31}}{a_{11}}$, … ,-$\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ sonlarga ko'paytirib, natijalarni mos ravishda sistemaning ikkinchi, uchunchi,…. , m-tenglamalariga qo'shamiz. Unda (1) ga ekvivalent bo'lgan quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n = b_2 \\ b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \dots + b_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m2}x_2 + b_{m3}x_3 + \dots + b_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1')$$

Bunda

$b_{\mu i}=a_{\mu i}-\frac{a_{1\mu}}{a_{11}}a_{\mu 1}$, $b_\nu=a_\nu-\frac{a_1}{a_{11}}a_{\nu 1}$ $(\nu=\overline{2,m};\ \mu=\overline{2,n};i=\overline{2,n};)$.

(1') sistemaning bir qismi bo'lgan yangi

$$\begin{cases} b_{22}x_2+b_{23}x_3+...+b_{2n}x_n=b_2 \\ b_{32}x_2+b_{33}x_3+...+b_{3n}x_n=b_3 \\ .... \\ .... \\ b_{k2}x_2+b_{k3}x_3+...+b_{kn}x_n=b_k \end{cases} \qquad (2)$$

sistemani qaraymiz.(2) sistemada $k\leq m$ bo'ladi, chunki barcha koeffisiyentlari va ozod hadi nolga teng bo'lgan ba'zi bir tenglamalar sistemasidan tashlab yuboriladi.

Agar biz (2) sistemani yechib, x_2, x_3 ,…,x_n larning son qiymatlarini topa olamiz. Unda (1) sistema yechilgan bo'ladi.

Endi (2) sistemadan x_2 noma'lumni yo'qotamiz. Buning uchun $b_{22}\neq 0$ deb faraz qilib, (2) ning birinchi tenglamasini ketma-ket $-\frac{b_{32}}{b_{22}}$, $-\frac{b_{42}}{b_{22}}$, … ,$-\frac{b_{k2}}{b_{22}}$ larga ko'paytirib, natijalarni shu sistemaning ikkinchi, uchinchi, … , k- tenglamalariga ketma-ket qo'shamiz. Unda

$$\begin{cases} b_{22}x_2+b_{23}x_3+...+b_{2n}x_n=b_2 \\ \quad c_{33}x_3+...+c_{3n}x_n=b'_3 \\ \quad c_{43}x_3+...+c_{4n}x_n=b'_4 \\ .... \\ \quad c_{l3}x_3+...+c_{ln}x_n=b'_l \end{cases} \qquad (2')$$

sistema hosil bo'lib ($l\leq k$), u (2) ga ekvivalentdir. (2') sistemaning bir qismi bo'lgan

$$\begin{cases} c_{33}x_3+c_{34}x_4+...+c_{3n}x_n=b'_3 \\ c_{43}x_3+c_{44}x_4+...+c_{4n}x_n=b'_4 \\ .... \\ c_{l3}x_3+c_{l4}x_4+...+c_{ln}x_n=b'_l \end{cases} \qquad (3)$$

(3) sistemadagi noma'lumlar soni (2') sistemadagi noma'lumlar sonidan hech bo'lmaganda bitta kam. Biz (3) sistemani yechsak, (2') sistemani ham yecha olamiz. Noma'lumlarni yo'qoridagi usulda ketma-ket yo'qotib, oxirida quyidagi uch holdan faqatgina biriga duch kelishimiz mumkin:

1. Noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish jarayonida (1) sistemaning birorta tenglamasi

$$0\,x_1+0\,x_2+…+0\,x_n=d \qquad (4)$$

Bo'lib bu yerda $d\neq 0$ ko'rinishda bo'lishi mumkin.

2. Sistemaning eng so'nggi (koeffisiyentlari noldan farqli) tenglamasining noma'lumlari soni ikkitadan kichik emas.

3.Eng so’nggi tenglama bir noma’lumli bo’lishi mumkin.

(4) ko’rinishdagi tenglama odatda ziddiyatli tenglama deb yuritiladi. (4) tenglamani noma’lumlarning hech qanday soni qiymatlari to’g’ri tenglikka aylantira olmaydi. Shuning uchun bunday holda (1) sistema yechimga ega bo’lmaydi.

2) holda (1’) sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1 \\ \quad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = c_3 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad l_{tn-1}x_{n-1} + \ldots + l_{tn}x_n = l_t \end{cases} \qquad (5)$$

ko’rinishni oladi, bu yerda a_{11}, b_{22}, … , l_{tn-1}, l_{tn} lar noldan farqlidir.

(5) sistema (1) ning natijasi bo’lgani uchun (5) ning har bir yechimi (1) ning ham yechimi bo’ladi. (5) sistemaga e’tibor qilsak, u trapetsiya shaklini ifodalaydi. Shuning uchun bunday sistema trapetsiyasimon sistema deb yuritiladi. Uning eng oxirgi

$$l_{tn-1}x_{n-1}+l_{tn}x_n=l_t \qquad (6)$$

tenglamasi cheksiz ko’p yechimga ega bo’ladigan (5) va demak, (1) sistema ham cheksiz ko’p yechimga egadir.

E s l a t m a. (5) sistemaning oxirgi tenglamasi ikkita noma’lumga bog’liq bo’lishi shart emas. 3) holda (5) sistemaga yana bitta

$$l_{t+1n}x_n=l_{t+1} \qquad (7)$$

shakldagi tenglama birlashtiriladi.

(7) tenglama, $l_{t+1n} \neq 0$ bo’lgani uchun, yagona yechimga ega. (7) dan x_n ning $x_n=\alpha_n$ son qiynatini topamiz va bu son qiymatni (6) ga qo’yib $x_{n-1}=\alpha_{n-1}$ ni topamiz. Keyin (5) sistemaning qolgan tenglamalaridan x_{n-2}, x_{n-3} ,…, x_2 , x_1 larga mos keluvchi α_{n-2}, α_{n-3}, …, α_2 , α_1 larni topamiz. Natijada (1) sistema (α_1, α_2 , … ,α_n) ko’rinishdagi yagona yechimga ega bo’ladi. Sistemaning oxirgi ko’rinishi uning uchburchak ko’rinishi deb yuritiladi.

X u l o s a: Agar noma’lumlarni ketma-ket yo’qotish natijasida:

a) sistemaning biror tenglamasi ziddiyatli tenglamaga aylansa, u holda (1) sistema yechimga ega bo’lmaydi;

b) sistema trapetsiyasimon shaklga kelsa, (1) sistemaga cheksiz ko’p yechimga ega bo’ladi;

v) sistema uchburchak shaklga keltirilsa, u holda (1) sistema yagona yechimga ega bo’ladi